

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

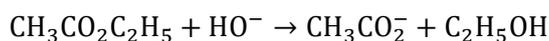
La calculatrice est autorisée

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I - Loi de vitesse

On étudie la cinétique de la réaction (supposée totale) de saponification de l'éthanoate d'éthyle ($\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5$) par la soude ($\text{Na}^+ + \text{HO}^-$), d'équation bilan :



Par simplicité, on notera :

- $\text{A} = \text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5$
- $\text{B}^- = \text{CH}_3\text{CO}_2^-$

On suppose que cette réaction admet un ordre partiel entier par rapport à chacun des réactifs. La loi de vitesse s'écrit donc :

$$v = k_0 [\text{A}]^p [\text{HO}^-]^q \quad \text{avec : } k_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et } p, q \in \mathbb{N}$$

On souhaite déterminer k_0 , p et q en suivant instantanément, et sans occasionner de perturbation, l'évolution de la conductivité σ du milieu réactionnel. On rappelle que la conductivité d'une solution est donnée par la loi de Kohlrausch :

$$\sigma = \sum_{i \in \{\text{ions}\}} \lambda_i^\circ [i]$$

Où $[i]$ désigne la concentration de l'espèce ionique i et λ_i° une constante, appelée conductivité ionique molaire. Pour notre étude, la loi de Kohlrausch devient :

$$\sigma = \lambda_{\text{Na}^+}^\circ [\text{Na}^+] + \lambda_{\text{HO}^-}^\circ [\text{HO}^-] + \lambda_{\text{B}^-}^\circ [\text{B}^-]$$

I.1 - Conditions stœchiométriques

On considère que les réactifs ont été introduits en proportions stœchiométriques. On note C_0 la concentration initiale en soude et en éthanoate d'éthyle

1) Exprimer la conductivité σ du mélange en fonction de l'avancement volumique x , de C_0 et des conductivités initiale ($t = 0$) et finale ($t = \infty$), notées respectivement σ_0 et σ_∞ .

2) En déduire que :

$$-\frac{d\sigma}{dt} = \left(\frac{C_0}{\sigma_0 - \sigma_\infty} \right)^{p+q-1} k_0 \cdot (\sigma - \sigma_\infty)^{p+q}$$

3) Montrer que le tracé d'une certaine fonction de $\frac{d\sigma}{dt}$ permet d'obtenir une droite de pente $p + q$. On précisera également l'abscisse à utiliser.

I.2 - Dégénérescence d'ordre

On utilise maintenant un large excès d'éthanoate d'éthyle. On note C_0 la concentration initiale en éthanoate d'éthyle et C_1 la concentration initiale en soude (avec $C_1 \ll C_0$). On cherche à vérifier que l'ordre partiel par rapport aux ions hydroxydes est $q = 1$.

4) Exprimer, dans cette nouvelle expérience, la conductivité σ du mélange en fonction de x , C_1 , σ_0 et σ_∞ .

5) En déduire que :

$$-\frac{d\sigma}{dt} = \left(\frac{C_1}{\sigma_0 - \sigma_\infty}\right)^{q-1} k_0 C_0^p \cdot (\sigma - \sigma_\infty)^q$$

6) Simplifier cette expression dans le cas où $q = 1$. Faire apparaître une constante de vitesse apparente k_{app} .

7) Montrer que le tracé d'une certaine fonction de $\sigma(t)$ en fonction du temps permet de vérifier qu'on a bien $q = 1$ et de déterminer la constante de vitesse apparente k_{app} .

I.3 - Manipulations

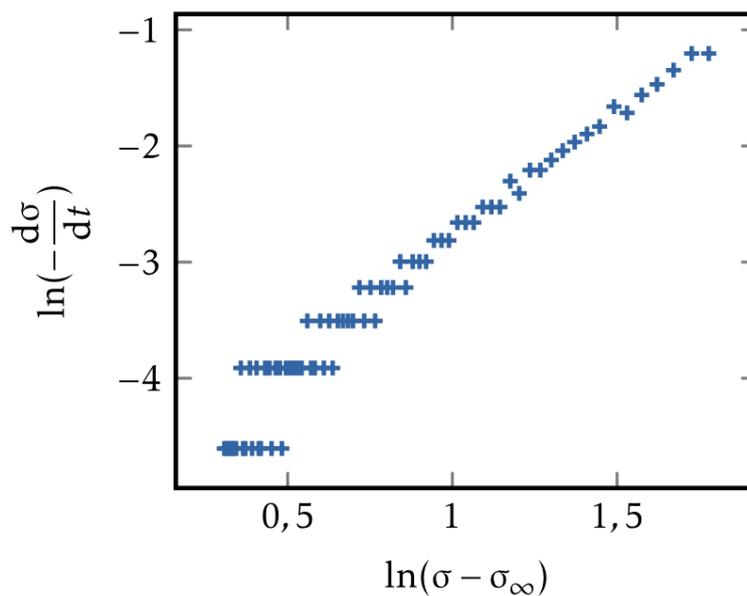
Solutions. On possède des solutions suivantes :

- solution de soude à $C_0 = 1,000 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$;
- solution d'éthanoate d'éthyle à C_0 ;
- solution de soude à $C_1 = C_0 \cdot 10^{-2}$;

Expérience n°1. On réalise dans un premier temps les manipulations suivantes.

- Dans un bécher de 100 mL, introduire 25 mL de soude à C_0 et mettre en marche l'agitation magnétique.
- Dans un autre bécher introduire 25 mL d'éthanoate d'éthyle à C_0 .
- Verser ce dernier bécher dans le premier.
- Mesurer la conductivité σ toutes les 15 s.
- Relever la conductivité, notée σ_∞ au bout d'un temps très long.

La figure ci-dessous représente le tracé $\ln\left(-\frac{d\sigma}{dt}\right)$ en fonction de $\ln(\sigma - \sigma_\infty)$.



8) Quels sont les points qui correspondent au début de la réaction ?

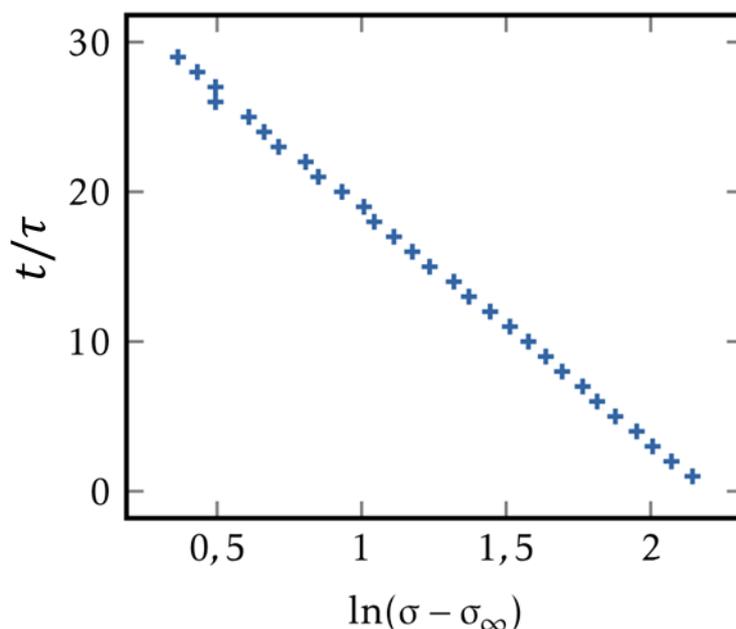
9) Que peut-on en déduire pour les ordres p et q ?

10) Comment peut-on expliquer la structure en marches d'escalier qui apparaît pour les faibles valeurs de $\ln\left(-\frac{d\sigma}{dt}\right)$?

Expérience n°2. On réalise ensuite les manipulations suivantes.

- Dans un bécher de 100 mL, introduire 25 mL de soude à C_0 et mettre en marche l'agitation magnétique.
- Dans un autre bécher introduire 25 mL d'éthanoate d'éthyle à C_1 .
- Verser ce dernier bécher dans le premier.
- Mesurer la conductivité σ toutes les $\tau = 30$ s.
- Relever la conductivité, notée σ_∞ au bout d'un temps très long.

La figure ci-dessous représente le tracé de t/τ , en fonction de $\ln(\sigma - \sigma_\infty)$.



11) En déduire les ordres partiels p et q .

12) Déterminer la constante de vitesse apparente k_{app} et en déduire la constante de vitesse k_0 . Bien préciser les unités.

13) Pourquoi a-t-on choisi d'utiliser un excès d'éthanoate d'éthyle plutôt que de soude ?

----- Fin de la partie I -----

II - Autour du soufre

L'élément soufre se situe sous l'oxygène dans le tableau périodique.

14) Proposer une structure de Lewis des espèces chimiques suivantes, sachant qu'aucune structure ne possède des éléments possédant une charge électrique : H_2S , SO_2 , SO_3 , H_2SO_4 et SF_6 .

On admet que :

- les trois atomes de H_2S forment un triangle isocèle ;
- les trois atomes de SO_2 forment un triangle isocèle ;
- l'atome de soufre de SO_3 est un centre d'un triangle équilatérale formé par les trois atomes d'oxygène.

15) Déterminer la direction et le sens du moment dipolaire de H_2S , SO_2 et SO_3 .

----- Fin de la partie II -----

III - Trajectoire des planètes

Dans cet exercice, nous allons étudier les trajectoires possibles en mécanique céleste, lorsque deux corps sont en interaction gravitationnelle, l'un étant beaucoup plus massif que le deuxième. On admet que la trajectoire est plane. On considère donc un repère à deux dimensions, que l'on muni de la base cartésienne $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et de la base polaire $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

Le corps le plus massif est supposé immobile à l'origine O du repère. Le corps le moins massif, noté M , est repéré par ses coordonnées (x, y) ou (r, θ) . Les deux corps sont supposés ponctuels.

On admet que les lois de la mécanique permettent de montrer que la distance $r = OM$ vérifie l'équation :

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos(\theta)}$$

avec $r_0 > 0$ une constante et $e \geq 0$ un paramètre appelé excentricité de la trajectoire.

16) Déterminer l'expression du vecteur vitesse \vec{v} dans la base polaire en fonction de θ , $\dot{\theta}$, r_0 et e .

Hypothèse : $e = 0$

17) Déterminer la nature de la trajectoire et la représenter.

Hypothèse : $0 < e < 1$

18) Tracer l'allure de la trajectoire dans le cas où $e = 0,5$.

19) On admet qu'il s'agit d'une ellipse de demi grand axe noté a . Déterminer l'expression de a en fonction de r_0 et e .

20) Déterminer les points de l'orbite où le vecteur vitesse est orthogonal au vecteur position.

Hypothèse : $e = 1$

21) Tracer l'allure de la trajectoire.

22) Rappeler les expressions de x et y en fonction de r et θ .

23) En déduire que la trajectoire est parabole d'équation $x(y)$ que l'on déterminera.

Hypothèse : $e > 1$

24) Déterminer le domaine radial accessible par M, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs que peut prendre θ au cours de la trajectoire. Tracer alors l'allure de la trajectoire dans le cas où $e = 3$.

----- Fin de la partie III -----

IV - Mouvement d'un jouet

On étudie dans ce problème le mouvement d'un jouet, modélisé par un point matériel noté M de masse $m = 20$ g glissant sur un support dans le champ de pesanteur terrestre. Le mouvement s'effectuera dans un plan vertical.

On étudiera les mouvements dans le référentiel terrestre, considéré galiléen pour la durée des phénomènes étudiés et dans lequel règne le champ de pesanteur considéré uniforme \vec{g} , de norme $g = 9,81$ m · s⁻².

On négligera toute source de frottement (fluide et solide).

Données : rayon du cylindre $R = 30$ cm.

IV.1 - Mouvement circulaire sans frottement

Le jouet aborde avec un vecteur vitesse \vec{v}_0 horizontal (point M_0) un support hémicylindrique de rayon noté R . On note \vec{N} la réaction normale du support.

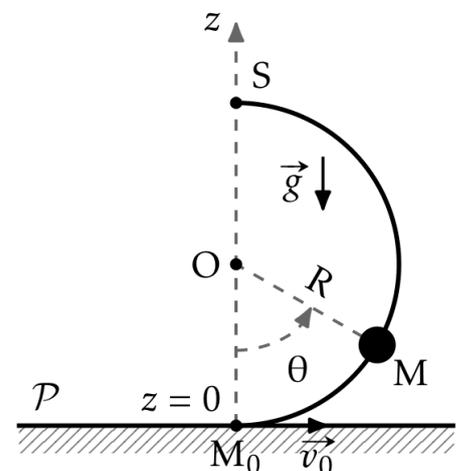
On nomme O le centre du cercle et on note θ l'angle entre la verticale descendante passant par O et le vecteur \vec{OM} .

25) Après avoir recopié et complété le schéma ci-contre (vecteurs de base, forces), écrire le principe fondamental de la dynamique en coordonnées polaires de centre O.

26) Après avoir multiplié l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, montrer que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ vérifie l'équation :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R}(1 - \cos(\theta))$$

27) En déduire l'expression de la norme N de la force de réaction \vec{N} tant que la vitesse ne s'annule pas, en fonction de θ et des constantes du problème.



28) Déterminer à quelle condition portant sur la vitesse v_0 le point matériel peut parvenir au sommet S du cercle. On note v_1 le cas limite. Calculer la valeur correspondante de v_1 .

On suppose dans toute la suite que cette condition est réalisée : le contact est alors rompu quand le jouet parvient au point S et il n'est ensuite plus soumis qu'à son poids.

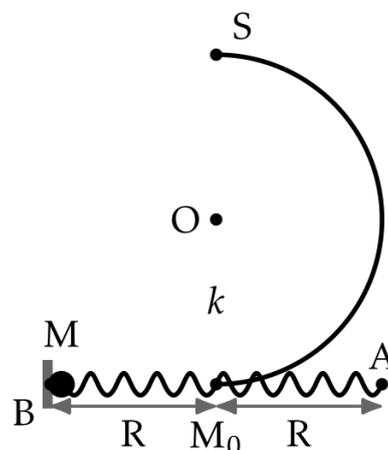
29) Établir l'équation de la trajectoire dans la base cartésienne, puis déterminer l'expression de la distance à laquelle il passe du point M_0 quand il rejoint le plan horizontal \mathcal{P} , en fonction des constantes du problème.

La vitesse v_0 initiale lui a été communiquée par un ressort, de la manière décrite ci-dessous.

Le ressort possède une longueur à vide égale à R et une constante de raideur notée k . Le ressort est accroché d'un côté au point A, point fixe dans le référentiel, situé à une distance R de M_0 . Il est accroché de l'autre côté à une plaque sans masse, situé en B, situé également à une distance R de M_0 .

La plaque en B est initialement maintenue par l'utilisateur et le jouet M est placé contre la plaque (libre, il n'y est pas accroché), à droite de celle-ci. L'ensemble est donc immobile et le ressort possède une longueur égale à deux fois sa longueur à vide.

Lorsque l'utilisateur lâche la plaque, le ressort se contracte et tire la plaque, qui entraîne avec elle le point M.



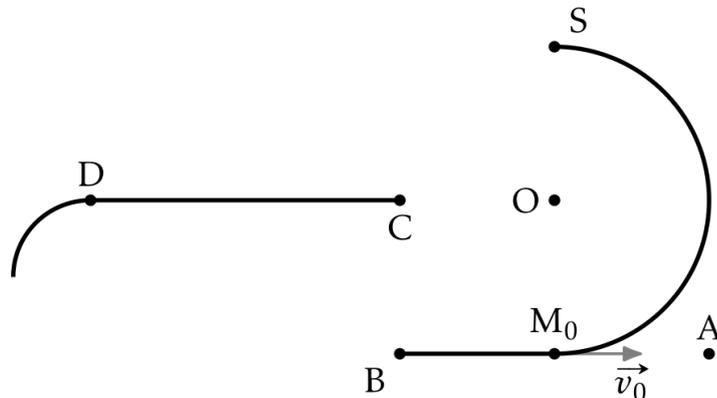
30) Justifier que l'objet, initialement appuyé contre la plaque sans y être fixé, s'en sépare quand il atteint le point M_0 .

31) Établir l'équation différentielle du mouvement dans la base cartésienne entre B et M_0 .

32) Effectuer un bilan d'énergie entre les points B et M_0 . En déduire l'expression puis valeur numérique de la valeur minimale de la constante de raideur, notée k_1 , pour que le jouet atteigne le point S.

IV.2 - Atterrissage

Après avoir quitté le support au point S, le jouet peut atteindre un plan horizontal situé à l'altitude R , commençant au point C à l'aplomb du point B et qui se termine par une portion circulaire de rayon $R/2$ au point D. On suppose que le point D est suffisamment loin pour que le jouet, lors de sa chute libre après avoir quitté le point S, ne puisse pas le dépasser.



33) Le jouet peut-il tomber entre C et O ?

On considère dans la suite qu'il atteint le plan horizontal entre les points C et D.

On suppose de plus qu'il conserve après l'atterrissage sur le plan horizontal CD la composante horizontale du vecteur vitesse qu'il avait à l'instant de l'atterrissage.

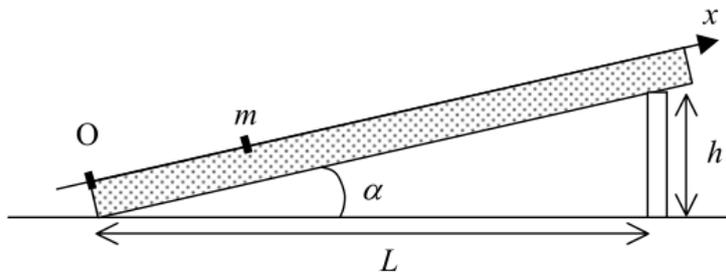
34) Déterminer l'expression de sa vitesse sur le plan horizontal en fonction, entre autres, de v_0 .

35) À quelle condition, portant entre autres sur v_0 , décolle-t-il de la portion circulaire dès qu'il atteint le point D ? Conclure.

----- Fin de la partie IV -----

V - Étude de la force de répulsion magnétique par un aimant

On dispose d'un banc à coussin d'air rectiligne (Ox), incliné par une cale de hauteur h d'un angle $\alpha \ll 1$ rad (on fera l'approximation des petits angles dans tout l'exercice) par rapport à l'horizontale, selon la figure ci-après. Sur ce banc, un aimant est fixé à l'origine O, et un autre aimant, de masse m , est fixé sur un palet mobile sans frottement.



Les aimants sont orientés de telle sorte qu'ils se repoussent mutuellement. La possibilité pour m d'osciller autour d'une position d'équilibre résulte de la compétition entre la répulsion électromagnétique, réduite à une force notée \vec{F} , prépondérante lorsque les aimants sont proches, et le poids, qui devient prépondérant lorsque la distance augmente.

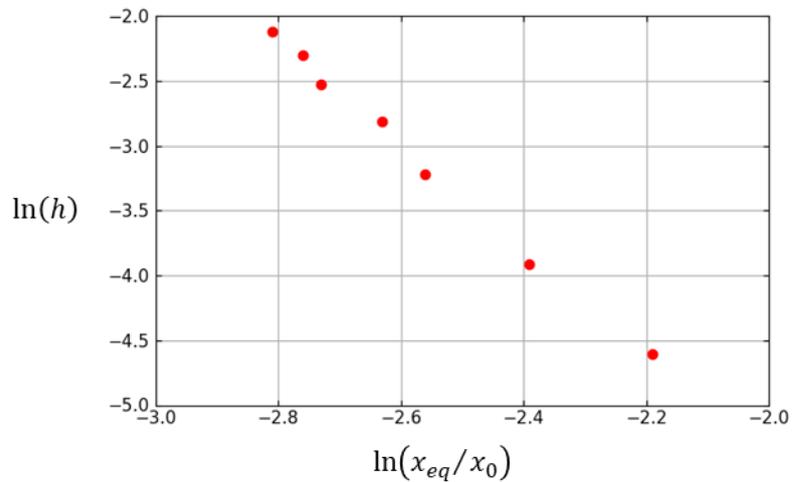
36) Faire un bilan des forces à l'équilibre sur un schéma.

Sans connaissances préalables en électromagnétisme, on cherche dans la suite à vérifier si la force électromagnétique agissant dans cette expérience peut être modélisée par une loi de la forme : $\vec{F} = k \left(\frac{x_0}{x}\right)^n \vec{u}_x$, avec : $x_0 > 0$, $k > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

37) Exprimer dans cette hypothèse la position d'équilibre x_{eq} en fonction de x_0 , k , m , g , L , h et n dans le cas des petits angles.

38) On mesure x_{eq} pour différentes hauteurs de cales, puis on représente $\ln(h)$ en fonction de $\ln\left(\frac{x_{eq}}{x_0}\right)$. En prenant $x_0 = 1$ m, déduire des mesures ainsi représentées ci-dessous les valeurs de n et de k . On donne : $L = 120$ cm, $m = 189$ g.

$\ln\left(\frac{x_{eq}}{x_0}\right)$	$\ln(h)$
-2,19	-4,61
-2,39	-3,91
-2,56	-3,22
-2,63	-2,81
-2,73	-2,53
-2,76	-2,30
-2,81	-2,12



On souhaite à présent étudier le mouvement de l'aimant lorsqu'il se situe proche de sa position d'équilibre. On pose : $x(t) = x_{eq} + \varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t)$ un infiniment petit du premier ordre.

39) Justifier qu'au voisinage de l'équilibre, la résultante des forces subies par m équivaut à une force de rappel élastique dont on précisera la constante de raideur équivalente, notée K .

40) Toutes choses égales par ailleurs, montrer que la période T des petites oscillations autour de l'équilibre est proportionnelle à une puissance de h que l'on déterminera. En déduire une seconde méthode de mesure de n que l'on décrira succinctement.

----- Fin de la partie V -----

I - Loi de vitesse

I.1 - Conditions stœchiométriques

1) On a :

$$\sigma = \lambda_{\text{Na}^+}^\circ C_0 + \lambda_{\text{HO}^-}^\circ (C_0 - x) + \lambda_{\text{B}^-}^\circ x \quad \sigma_0 = \lambda_{\text{Na}^+}^\circ C_0 + \lambda_{\text{HO}^-}^\circ C_0 \quad \sigma_\infty = \lambda_{\text{Na}^+}^\circ C_0 + \lambda_{\text{B}^-}^\circ C_0$$

Alors,

$$\sigma_\infty - \sigma_0 = (\lambda_{\text{B}^-}^\circ - \lambda_{\text{HO}^-}^\circ) C_0 \quad \sigma - \sigma_0 = (\lambda_{\text{B}^-}^\circ - \lambda_{\text{HO}^-}^\circ) x \quad \sigma - \sigma_\infty = (\lambda_{\text{HO}^-}^\circ - \lambda_{\text{B}^-}^\circ) (C_0 - x)$$

Finalement,

$$\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_\infty - \sigma_0} = \frac{x}{C_0} \Rightarrow \boxed{\sigma = \sigma_0 + \frac{\sigma_\infty - \sigma_0}{C_0} x}$$

2) La loi de vitesse s'écrit, par définition :

$$\begin{aligned} v = \frac{dx}{dt} = \frac{C_0}{\sigma_\infty - \sigma_0} \frac{d\sigma}{dt} &\Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\sigma_\infty - \sigma_0}{C_0} k_0 (C_0 - x)^p (C_0 - x)^q \\ &\Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\sigma_\infty - \sigma_0}{C_0} k_0 \left(-C_0 \frac{\sigma - \sigma_\infty}{\sigma_\infty - \sigma_0} \right)^{p+q} \\ &\Rightarrow \boxed{-\frac{d\sigma}{dt} = \left(\frac{C_0}{\sigma_0 - \sigma_\infty} \right)^{p+q-1} k_0 \cdot (\sigma - \sigma_\infty)^{p+q}} \end{aligned}$$

3) Il faut tracer (avec log ou ln) : $\ln\left(-\frac{d\sigma}{dt}\right)$ en fonction de $\ln(\sigma - \sigma_\infty)$. En effet :

$$\underbrace{\ln\left(-\frac{d\sigma}{dt}\right)}_y = \underbrace{(p+q)}_a \underbrace{\ln(\sigma - \sigma_\infty)}_x + \underbrace{\ln\left(\left(\frac{C_0}{\sigma_0 - \sigma_\infty}\right)^{p+q-1} k_0\right)}_b$$

I.2 - Dégénérescence d'ordre

4) Cette fois, on peut considérer que $[A] \simeq C_0$ et que $[\text{HO}^-] = C_1 - x$. Les relations sont les mêmes qu'à la première question de l'exercice en remplaçant C_0 par C_1 .

$$\boxed{\sigma = \sigma_0 + \frac{\sigma_\infty - \sigma_0}{C_1} x}$$

5) La loi de vitesse s'écrit, par définition :

$$\begin{aligned} v = \frac{dx}{dt} = \frac{C_1}{\sigma_\infty - \sigma_0} \frac{d\sigma}{dt} &\Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\sigma_\infty - \sigma_0}{C_1} k_0 C_0^p (C_1 - x)^q \\ &\Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\sigma_\infty - \sigma_0}{C_1} k_0 C_0^p \left(-C_1 \frac{\sigma - \sigma_\infty}{\sigma_\infty - \sigma_0} \right)^q \\ &\Rightarrow \boxed{-\frac{d\sigma}{dt} = \left(\frac{C_1}{\sigma_0 - \sigma_\infty} \right)^{q-1} k_0 C_0^p \cdot (\sigma - \sigma_\infty)^q} \end{aligned}$$

6) Si $q = 1$, on a :

$$\boxed{-\frac{d\sigma}{dt} = \underbrace{k_0 C_0^p}_{k_{app}} \cdot (\sigma - \sigma_\infty)}$$

7) Posons $y = \sigma - \sigma_\infty$. On obtient l'ED suivante :

$$\frac{dy}{dt} + k_{app} \cdot y = 0 \Rightarrow y(t) = y_0 e^{-k_{app} t} \Rightarrow \boxed{\sigma - \sigma_\infty = (\sigma_0 - \sigma_\infty) e^{-k_{app} t}}$$

Il faut tracer : $\ln(\sigma - \sigma_\infty)$ en fonction du temps. En effet :

$$\underbrace{\ln(\sigma - \sigma_\infty)}_y = \underbrace{-k_{app}}_a \underbrace{t}_x + \underbrace{\ln(\sigma_0 - \sigma_\infty)}_b$$

Remarque : dans la suite, l'énoncé tracer t/τ en fonction de $\ln(\sigma - \sigma_\infty)$. Ce qui donne :

$$\underbrace{t/\tau}_y = \underbrace{\frac{-1}{k_{app} \tau}}_a \underbrace{\ln(\sigma - \sigma_\infty)}_x + \text{cte} + b$$

I.3 - Manipulations

8) Puisqu'il est possible de tracer le log de $-\frac{d\sigma}{dt}$, cela signifie que $\sigma(t)$ est une fonction décroissante, donc $\ln(\sigma - \sigma_\infty)$ décroît avec le temps. Les premiers points sont donc ceux en haut à droite du graphe.

9) En prenant les points (0,5 ; -4) et (1,5 ; -2), on peut en déduire que la pente est d'environ +2. Avec le résultat de la partie I, on en déduit : $p + q = 2$.

10) Notons $\delta\sigma$ le plus petit écart de conductivité que peut lire le conductimètre (exemple : pour un conductimètre précis à 2 chiffres après la virgule, $\delta\sigma = 0,01$). Alors, l'écart entre deux mesures quelconques est nécessairement de la forme : $\Delta\sigma = n \cdot \delta\sigma$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Un plateau signifie une dérivée constante. La dérivée numérique est probablement calculée via une formule du type :

$$\frac{d\sigma}{dt} \mapsto \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta t}$$

Le pas de temps entre deux mesures Δt étant constant, une dérivée constante signifie que l'on retrouve à plusieurs reprises exactement la même valeur de $\Delta\sigma$ donc de n .

Cela se produit à la fin de l'expérience, où σ tend lentement et à une vitesse qui varie peu vers sa valeur à l'infini σ_∞ . Ainsi, plus on avance dans l'expérience, plus les plateaux vont durer longtemps et on verra défiler les cas où : $n = 10$, $n = 9$, $n = 8$, ..., $n = 1$ et finalement $n = 0$, correspondant à la fin de l'expérience et à une dérivée nulle donc $\ln\left(-\frac{d\sigma}{dt}\right) \rightarrow -\infty$.

11) On observe une droite, donc l'ordre 1 est validé. On en déduit alors $p = q = 1$.

12) Comme vu précédemment, la pente vaut : $-1/\tau k_{app}$ avec $\tau = 30$ s. À l'aide des deux points (0,5 ; 27) et (2 ; 3) on peut en déduire que la pente est d'environ -16. On en déduit :

$$k_{app} = \frac{-1}{30 \text{ s} \times (-16)} = 2,08 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} \Rightarrow k_0 = \frac{k_{app}}{C_0} = 2,08 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{L}$$

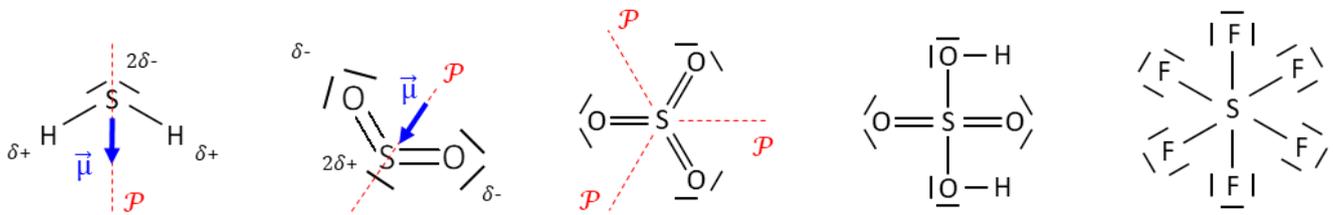
13) Un excès de soude aurait donné une conductivité quasi-constante tout au long de l'expérience, ce qui n'est pas très pratique pour un suivi conductimétrique... En effet, on aurait eu (avec : $C_0 \ll C_1$) :

$$\begin{cases} \sigma = \lambda_{\text{Na}^+}^\circ C_1 + \lambda_{\text{HO}^-}^\circ (C_1 - x) + \lambda_{\text{B}^-}^\circ x \\ \sigma_0 = \lambda_{\text{Na}^+}^\circ C_1 + \lambda_{\text{HO}^-}^\circ C_1 \\ \sigma_\infty = \lambda_{\text{Na}^+}^\circ C_1 + \lambda_{\text{HO}^-}^\circ \underbrace{(C_1 - C_0)}_{\approx C_1} + \underbrace{\lambda_{\text{B}^-}^\circ C_0}_{\ll \lambda_{\text{Na}^+}^\circ C_1} \approx \lambda_{\text{Na}^+}^\circ C_1 + \lambda_{\text{HO}^-}^\circ C_1 = \sigma_0 \end{cases}$$

----- Fin de la partie I -----

II - Autour du soufre

14) Soufre et oxygène : 6 e^- de valence. Hydrogène : 1 e^- de valence. Le soufre peut être hypervalent. On en déduit les formules de Lewis :



15) Analyse des symétries : le plan de la feuille et tous les plans \mathcal{P} sont des plans de symétrie. Le moment dipolaire appartient à l'intersection de tous les plans. De plus, $\chi_{\text{O}} > \chi_{\text{S}} > \chi_{\text{H}}$ et on ment dipolaire est orienté des charges négatives vers les charges positives.

----- Fin de la partie II -----

III - Trajectoire des planètes

16) En polaire :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta = \frac{-r_0 e \dot{\theta} \sin(\theta)}{[1 + e \cos(\theta)]^2} \vec{u}_r + \frac{r_0 \dot{\theta}}{1 + e \cos(\theta)} \vec{u}_\theta$$

17) Dans le cas où $e = 0$, on a : $[r = r_0]$. La distance OM étant constant, le point M décrit une trajectoire circulaire de centre O rayon r_0 .

18) Cf. graphe.

19) On remarque graphiquement (points en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$) que :

$$2a = \frac{r_0}{1 - e} + \frac{r_0}{1 + e} = \frac{2r_0}{1 - e^2} \Rightarrow a = \frac{r_0}{1 - e^2}$$

20) On souhaite :

$$\overline{\text{OM}} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{r_0}{1 + e \cos(\theta)} \times \frac{-r_0 e \dot{\theta} \sin(\theta)}{[1 + e \cos(\theta)]^2} = 0 \Rightarrow \sin(\theta) = 0$$

Il existe deux points où $\overline{\text{OM}} \cdot \vec{v} = 0$, pour $\theta = 0$ (périgée) et pour $\theta = \pi$ (apogée).

21) Cf graphe.

22) On a : $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$

23) On en déduit :

$$\begin{aligned} r = \frac{r_0}{1 + \cos(\theta)} &\Rightarrow r + r \cos(\theta) = r_0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x = r_0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = r_0^2 + x^2 - 2xr_0 \\ &\Rightarrow x = -\frac{y^2}{2r_0} + \frac{r_0}{2} \end{aligned}$$

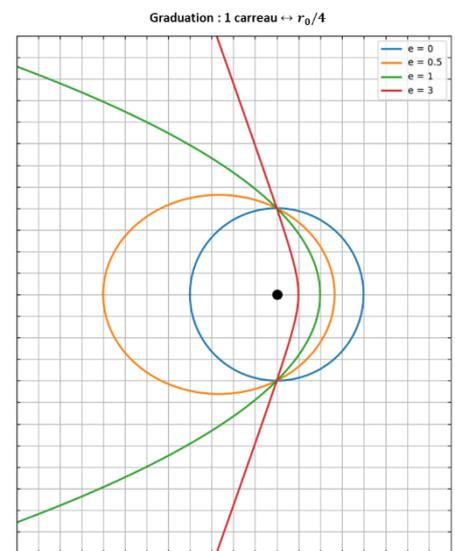
24) L'énoncé donne l'expression de $r(\theta)$ mais par définition d'une distance, on a nécessairement $r > 0$. Ainsi,

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos(\theta)} > 0 \Rightarrow 1 + e \cos(\theta) > 0 \Rightarrow \cos(\theta) > -\frac{1}{e}$$

On introduit $\theta_\ell = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Alors, $\theta \in [-\theta_\ell; \theta_\ell]$.

On en déduit ($\theta_\ell \approx 109^\circ$) : Cf graphe. Les asymptotes font des angles de $\pm\theta_\ell$ avec l'horizontale.

----- Fin de la partie III -----



IV - Mouvement d'un jouet

IV.1 - Mouvement circulaire sans frottement

25) BDF : poids, réaction normale du support.

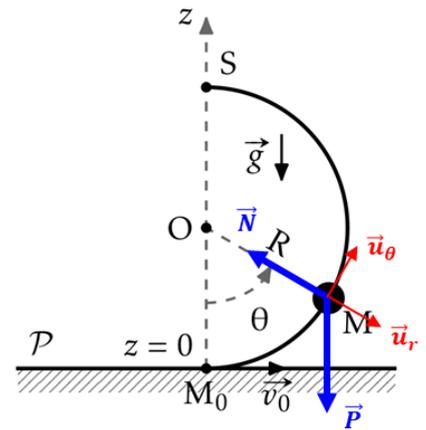
$$\vec{P} = -mg \vec{u}_z = mg(\cos(\theta) \vec{u}_r - \sin(\theta) \vec{u}_\theta) \quad \text{et} \quad \vec{N} = -N \vec{u}_r$$

On rappelle que l'accélération vaut (avec $r = R$ constant) :

$$\vec{OM} = R \vec{u}_r \quad \vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Ainsi, le PFD donne :

$$\begin{cases} mR\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) \\ -mR\dot{\theta}^2 = mg \cos(\theta) - N \end{cases}$$



26) On multiplie par $\dot{\theta}$ la première équation et on intègre entre le point M_0 et un point M quelconque.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \dot{\theta} \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{R} \cos(\theta) \right) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{R} \cos(\theta) = \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} - \frac{g}{R}$$

Or, à l'instant initial,

$$\vec{v} = \vec{v}_0 = R\dot{\theta}_0 \vec{u}_\theta$$

On en déduit :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R} (1 - \cos(\theta))$$

27) On en déduit l'expression de \vec{N} à l'aide de la deuxième équation :

$$N = mR\dot{\theta}^2 + mg \cos(\theta) = m \left(\frac{v_0^2}{R} - 2g + 3g \cos(\theta) \right)$$

28) Le jouet est en contact tant que $N \geq 0$. On veut qu'il soit encore en contact pour $\theta = \pi$. On en déduit :

$$\frac{v_0^2}{R} - 2g - 3g \geq 0 \Rightarrow v_0 \geq v_1 = \sqrt{5Rg} = 3,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

29) On est dans le cas d'une chute libre avec pour conditions initiales :

$$\vec{OM} = R \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{v} = -R\dot{\theta}(\theta = \pi) \vec{u}_x = -\sqrt{v_0^2 - 4gR} \cdot \vec{u}_x$$

Ainsi, le PFD donne :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\sqrt{v_0^2 - 4gR} \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t\sqrt{v_0^2 - 4gR} \\ z = -\frac{gt^2}{2} + R \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{gx^2}{2(v_0^2 - 4gR)} + R$$

On cherche le $x < 0$ lorsque $z = -R$.

$$-R = -\frac{gx^2}{2(v_0^2 - 4gR)} + R \Rightarrow x^2 = \frac{4R}{g} (v_0^2 - 4gR) \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{4R}{g} (v_0^2 - 4gR)}$$

La distance recherchée est la valeur absolue de cette position :

$$\Delta x = \sqrt{\frac{4R}{g} (v_0^2 - 4gR)}$$

30) De B à M_0 la longueur du ressort est plus grande que sa longueur à vide. La force (et donc l'accélération) est donc selon $+\vec{u}_x$. À partir de M_0 , la longueur du ressort est plus petite que sa longueur à vide. La force (et donc l'accélération) est donc selon $-\vec{u}_x$. Ainsi, à partir de M_0 le plateau décélère. Le jouet, qui n'est pas lié au plateau, n'a aucune raison de décélérer et se décolle donc du plateau.

31) Il faut déterminer k_1 de manière à fournir une vitesse v_1 au point M_0 . Les conditions initiales sont : $x = -R$ et $\dot{x} = 0$. Longueur du ressort et position sont reliés par : $\ell = R - x$. Le PFD donne :

$$m\ddot{x} = k(\ell - \ell_0) \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} = -kx}$$

32) On multiplie par \dot{x} puis on intègre entre B et M_0 .

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}kR^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow k = \frac{mv_0^2}{R^2}$$

On en déduit :

$$\boxed{k_1 = \frac{mv_1^2}{R^2} = \frac{5mg}{R} = 3,3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}$$

IV.2 - Atterrissage

33) On reprend les résultats des questions précédentes. Dans le pire des scénarios, $v_0 = v_1 = \sqrt{5Rg}$. On reprend l'équation de la parabole et l'on recherche le $x < 0$ lorsque $z = 0$.

$$0 = -\frac{gx^2}{2(v_1^2 - 4gR)} + R = -\frac{gx^2}{2Rg} + R \Rightarrow x^2 = 2R^2 \Rightarrow x = -R\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\Delta x = R\sqrt{2} > R}$$

Le jouet tombe à une distance minimale $\Delta x > R$ la distance OC. Donc il ne peut pas tomber entre C et O.

34) La question 29 donne immédiatement (la composante horizontale de la vitesse est constante depuis S) :

$$\boxed{\dot{x} = -\sqrt{v_0^2 - 4gR}}$$

35) Il faut suivre le même raisonnement que dans les questions 25 à 28 (poser une nouvelle base polaire centrée sur le deuxième cercle). Cela a également été fait TD M2, exercice avec l'enfant et l'igloo. On montre alors que le jouet décolle immédiatement si :

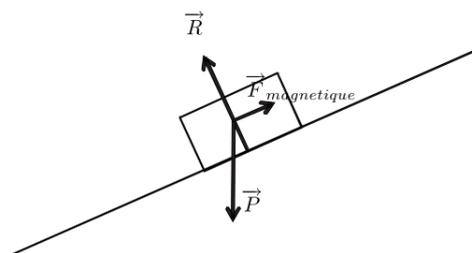
$$\dot{x}^2 \geq \frac{gR}{2} \Rightarrow \boxed{v_0 \geq \sqrt{\frac{9gR}{2}}}$$

Or, $\sqrt{\frac{9gR}{2}} < v_1$. Cette condition est donc toujours atteinte puisque l'on a supposé que $v_0 > v_1$. Le jouet décolle donc toujours.

----- Fin de la partie IV -----

V - Étude de la force de répulsion magnétique par un aimant

36) BDF : poids, réaction normale du support, répulsion magnétique.



37) Le PFD donne :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{mag}$$

On projette selon l'axe (Ox) et on se place à l'équilibre :

$$0 = -mg \sin(\alpha) + k \left(\frac{x_0}{x_{eq}} \right)^n \Rightarrow x_{eq} = x_0 \left(\frac{k}{mg \sin(\alpha)} \right)^{1/n}$$

On se place dans l'approximation des petits angles : $\sin(\alpha) = \alpha = \tan(\alpha) = \frac{h}{L}$. Ainsi :

$$\boxed{x_{eq} = x_0 \left(\frac{kL}{mgh} \right)^{1/n}}$$

38) D'après la relation précédente,

$$\ln(h) = \ln \left(\frac{kL}{mg} \right) - n \ln \left(\frac{x_{eq}}{x_0} \right)$$

On effectue une régression linéaire à la calculatrice $y = ax + b$, avec $y = \ln(h)$ et $x = \ln \left(\frac{x_{eq}}{x_0} \right)$. On trouve alors : $a = -4,06$ et $b = -13,55$. On en déduit : $\boxed{n = 4}$ et $\boxed{k = 2 \cdot 10^{-6} \text{ N}}$.

39) On cherche à montrer que la somme des forces s'écrit : $\vec{F}_{res} = -K(x - x_{eq}) \vec{u}_x$. En effet, on reconnaît bien la forme d'une force de rappel de raideur K et où la position d'équilibre vaut x_{eq} .

La somme des forces projetée selon \vec{u}_x vaut :

$$F_{res} = -\frac{mgh}{L} + k \left(\frac{x_0}{x} \right)^n = -\frac{mgh}{L} + k \left(\frac{x_0}{x_{eq} + \varepsilon} \right)^n = -\frac{mgh}{L} + k \left(\frac{x_0}{x_{eq}} \right)^n \left(1 + \frac{\varepsilon}{x_{eq}} \right)^n$$

On effectue un développement limité :

$$F_{res} \simeq -\frac{mgh}{L} + k \cdot \frac{mgh}{kL} \left(1 + n \frac{\varepsilon}{x_{eq}} \right) = \frac{nmgh}{L} \cdot \frac{\varepsilon}{x_{eq}} = \frac{nmgh}{Lx_{eq}} (x - x_{eq})$$

On en déduit :

$$\boxed{K = \frac{nmgh}{Lx_{eq}} = nk \frac{x_0^n}{x_{eq}^{n+1}}}$$

40) Situation analogue à un simple ressort. La période des oscillations vaut :

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m x_{eq}^{n+1}}{k n x_0^n}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k n} x_0 \left(\frac{kL}{mgh} \right)^{\frac{n+1}{n}}} \propto \boxed{h^{-\frac{n+1}{2n}}}$$

Pour mesurer n , on peut donc mesurer T pour différentes hauteurs h puis tracer $\ln(T)$ en fonction de $\ln(h)$: on obtiendra une droite de pente $-\frac{n+1}{2n}$.

----- Fin de la partie V -----